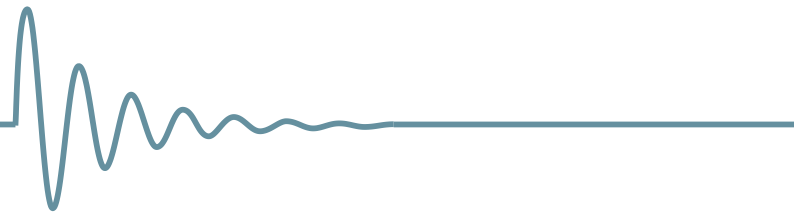
Tema 3

Representación de Fourier: señales aperiódicas



Transformada de Fourier: señales discretas (I)

- Consideramos una señal $\tilde{x}[n]$ periódica, $\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n+N]\ \forall n$.
- Podemos realizar un desarrollo en serie de Fourier

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X[k] e^{jk\Omega_0 n}$$

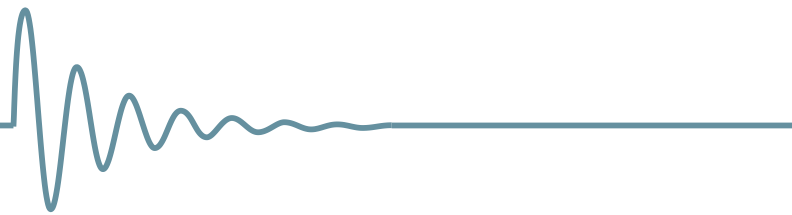
$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

- Definimos una señal de duración finita $x[n]$ como un periodo de la señal

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & -M \leq n \leq M \\ 0, & |n| > M \end{cases}$$

- De forma que

$$x[n] = \lim_{N \to \infty} \tilde{x}[n]$$



Transformada de Fourier: señales discretas (II)

- Reescribimos la ecuación de análisis $X[k]$ en términos de la señal aperiódica $x[n]$:

$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} \tilde{x}[n]e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N}\sum_{n=-M}^{M} \tilde{x}[n]e^{-jk\Omega_0 n} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=-M}^{M} x[n]e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jk\Omega_0 n}$$

- Definimos una función continua en frecuencia (2π periódica)

$$X\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

- La ecuación de análisis se puede reescribir en la forma

$$X[k] = \frac{X\left(e^{jk\Omega_0}\right)}{N}$$

Transformada de Fourier: señales discretas (III)

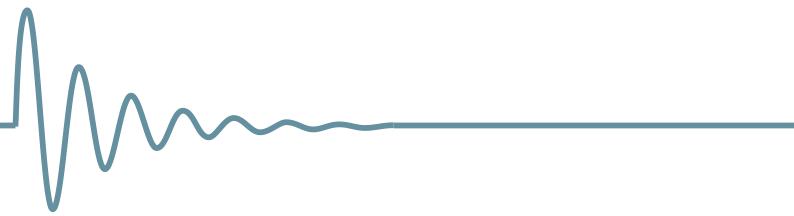
- Sustituyendo en la ecuación de síntesis,

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle} X\left(e^{jk\Omega_0}\right)e^{jk\Omega_0 n} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=\langle N\rangle} X\left(e^{jk\Omega_0}\right)e^{jk\Omega_0 n}\Omega_0;\ \ \frac{1}{N} = \frac{\Omega_0}{2\pi}$$

- Recordamos que $x[n] = \lim_{N\to\infty} \tilde{x}[n]$, luego

$$x[n] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\sum_{k=\langle N\rangle} X\left(e^{jk\Omega_0}\right)e^{jk\Omega_0 n}\Omega_0$$

  - $X\left(e^{j\Omega}\right)$ y $e^{j\Omega n}$ son periódicas (2π), luego su producto también lo será
  - Se suman N intervalos consecutivos de una función $X\left(e^{j\Omega}\right)e^{j\Omega n}$, evaluados en $k\Omega_0$, y multiplicados por la separación entre muestras $\Omega_0 = 2\pi/N$ (suma de N intervalos consecutivos de anchura Ω_0):
    - la ecuación representa una regla de aproximación rectangular a una integral



Transformada de Fourier: señales discretas (IV)

- Como el integrando es periódico se puede integrar en cualquier intervalo de anchura 2π

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} X\left(e^{j\Omega}\right) e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\Omega}\right) e^{j\Omega n} d\Omega$$

- $x[n]$ es una combinación lineal de exponenciales complejas discretas infinitesimalmente próximas de amplitud

$$\frac{X\left(e^{j\Omega}\right) d\Omega}{2\pi}$$

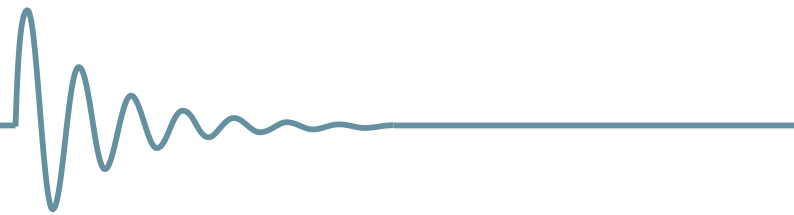
Transformada de Fourier: señales discretas (V)

- Representación de Fourier

$$x[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(e^{j\Omega})$$

$$\begin{cases} x[n] = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega \\ X(e^{j\Omega}) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \end{cases}$$

- Ecuación de análisis: transformada de Fourier de señales discretas en el tiempo
- Ecuación de síntesis: transformada inversa de Fourier de señales discretas en el tiempo



Transformada de Fourier: señales discretas (VI)

- Convergencia

$$x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X\left(e^{j\Omega}\right)$$

- Hemos supuesto que $x[n]$ era de duración finita
- Sin embargo, la DTFT se puede aplicar a señales que no son de duración finita
  - Se debe analizar bajo que condiciones la suma infinita de la ecuación de análisis converge, es decir cuando $\left|X\left(e^{j\Omega}\right)\right| < \infty, \forall\Omega$

    - Señales sumables en valor absoluto:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

    - Señales de energía finita:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

Transformada de Fourier: señales discretas (VII)

DOMINIO DEL TIEMPO	SEÑAL PERIÓDICA	SEÑAL APERIÓDICA	
SEÑAL CONTINUA	***Series de Fourier (FS)*** $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\, e^{jk\,\omega_0 t}$ $X[k] = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t) e^{-jk\,\omega_0 t}\, dt$ $x(t)\ periódica\ (T);\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$	***Transformada de Fourier (FT)***	SEÑAL APERIÓDICA
SEÑAL DISCRETA	***Series de Fourier (DTFS)*** $x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} X[k] e^{jk\,\Omega_0 n}$ $X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jk\,\Omega_0 n}$ $x[n], X[k]\ periodo\ (N), \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$	***Transformada de Fourier (DTFT)*** $x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n}\, d\Omega$ $X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n}$ $X(e^{j\Omega})\ periódica\ (2\pi)$	SEÑAL PERIÓDICA
	SEÑAL DISCRETA	SEÑAL CONTINUA	**DOMINIO DE LA FRECUENCIA**

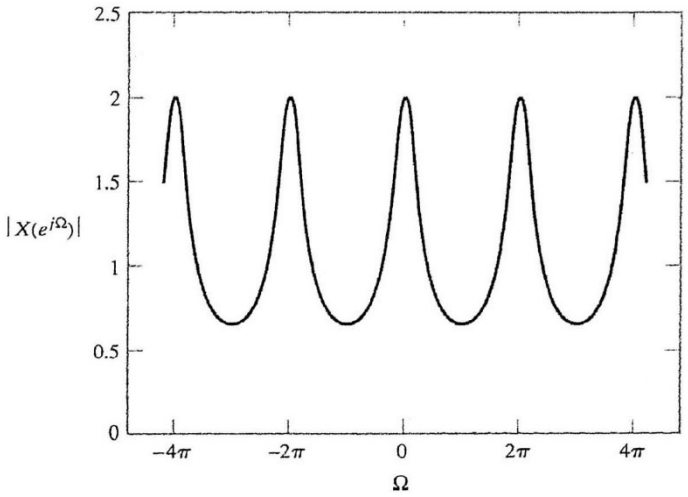
Transformada de Fourier: señales discretas (VIII)

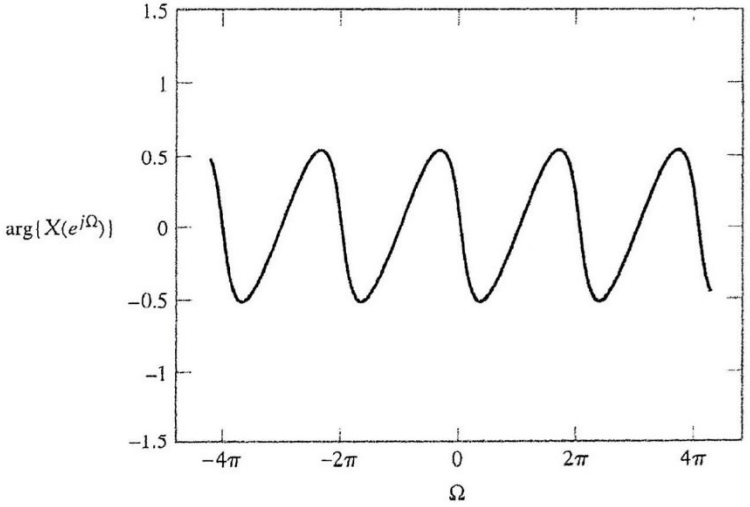
- Ejemplo1: Encontrar la DTFT de la secuencia $x[n] = \alpha^n u[n]$
- Solución:

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}}, |\alpha| < 1$$

$$|X(e^{j\Omega})| = \frac{1}{(\alpha^2 + 1 - 2\alpha\cos(\Omega))^{1/2}}; \quad arg\{X(e^{j\Omega})\} = -arctg\left(\frac{\alpha\sin(\alpha)}{1 - \alpha\cos(\Omega)}\right)$$

– Si $\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)$: $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

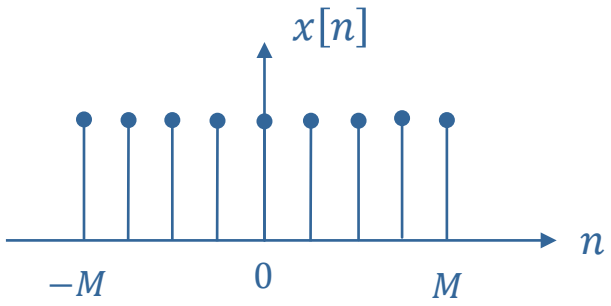




Transformada de Fourier: señales discretas (IX)

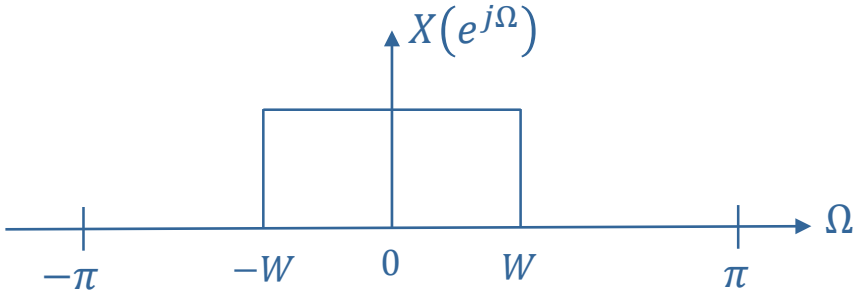
- Ejemplo 2: Encontrar la DTFT de la secuencia

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq M \\ 0, & |n| > M \end{cases}$$



- Ejemplo 3: Encontrar la DTFT inversa:

$$X(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq W \\ 0, & W < |\Omega| < \pi \end{cases}$$



Transformada de Fourier: señales continuas (I)

- Si $\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t+T), \forall t$ podemos realizar un desarrollo en serie de Fourier

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t}$$

$$X[k] = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

- Definimos una señal de duración finita $x(t)$ como un periodo de la señal $\tilde{x}(t)$

$$x(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t), & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$x(t) = \lim_{T \to \infty} \tilde{x}(t)$$

Transformada de Fourier: señales continuas (II)

- Reescribimos la ecuación de análisis $X[k]$ en términos de la señal aperiódica $x(t)$,

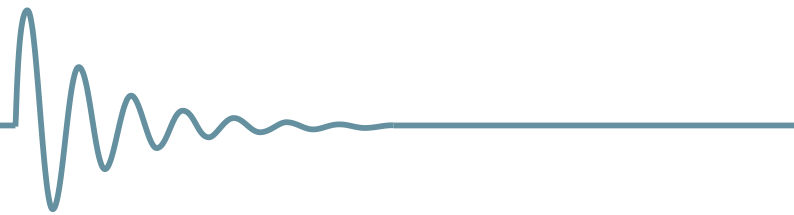
$$X[k] = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

- Definimos una función continua en frecuencia

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

- La ecuación de análisis se puede reescribir en la forma

$$X[k] = \frac{X(jk\omega_0)}{T}$$



Transformada de Fourier: señales continuas (III)

- Sustituyendo en la ecuación de síntesis,

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}\omega_0; \qquad \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

- Recordamos que $x(t) = \lim_{T\to\infty} \tilde{x}(t)$, luego

$$x(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}\omega_0$$

- Es la aproximación de la integral de $X(j\omega)e^{j\omega t}$:

$$T \to \infty \Longrightarrow \omega_0 \to 0; \quad \omega = k\omega_0 \Longrightarrow d\omega = \omega_0; \quad k \to \infty \Longrightarrow \omega \to \infty$$

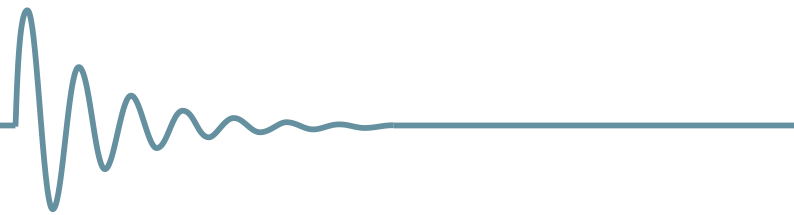
$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Transformada de Fourier: señales continuas (IV)

- Representación de Fourier

$$x(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} X(j\omega) \qquad \begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \\ X(j\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \end{cases}$$

- Ecuación de análisis: transformada de Fourier de señales continuas en el tiempo (FT-2)
- Ecuación de síntesis: transformada inversa de Fourier de señales continuas en el tiempo (FT-1)



Transformada de Fourier: señales continuas (V)

- Convergencia

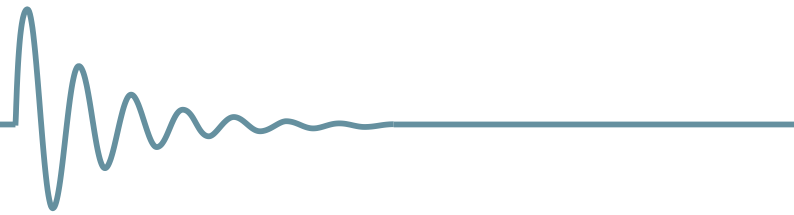
$$x(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} X(j\omega)$$

- Hemos supuesto que $x(t)$ era de duración finita
- Sin embargo, la FT se puede aplicar a señales que no son de duración finita
  - Condiciones de convergencia
    - Señales de energía finita:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - \tilde{x}(t)|^2 dt = 0 \Longrightarrow x(t) - \tilde{x}(t)\ energía\ nula$$

  - $x(t)$ y $\tilde{x}(t)$ pueden diferir en algunos puntos



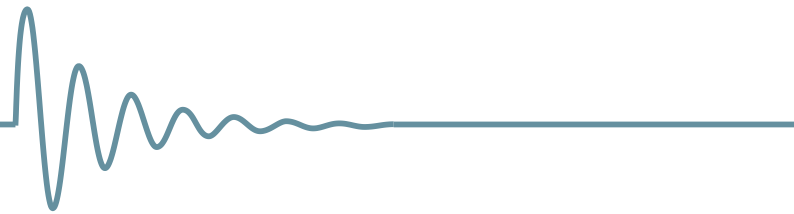
Transformada de Fourier: señales continuas (VI)

- Condiciones de Dirichlet
  - garantizan la convergencia para todos los valores de t excepto en las discontinuidades
  - Señales integrables en valor absoluto

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty$$

  - Número finito de máximos y mínimos para cualquier intervalo finito
  - Número finito de discontinuidades en cualquier intervalo finito

- Si se admite la utilización de impulsos se puede aplicar la FT a ciertas señales que no verifican ninguno de los dos criterios



Transformada de Fourier: señales continuas (VII)

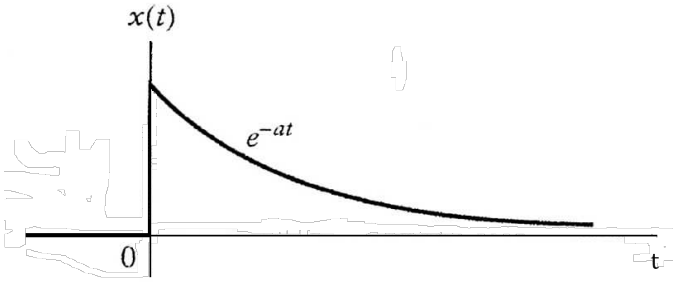
DOMINIO DEL TIEMPO	SEÑAL PERIÓDICA	SEÑAL APERIÓDICA	
SEÑAL CONTINUA	***Series de Fourier (FS)*** $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\, e^{jk\,\omega_0 t}$ $X[k] = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t) e^{-jk\,\omega_0 t}\, dt$ $x(t)\ periódica\ (T);\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$	***Transformada de Fourier (FT)*** $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$ $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt$	SEÑAL APERIÓDICA
SEÑAL DISCRETA	***Series de Fourier (DTFS)*** $x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} X[k] e^{jk\,\Omega_0 n}$ $X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jk\,\Omega_0 n}$ $x[n], X[k]\ periodo\ (N), \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$	***Transformada de Fourier (DTFT)*** $x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n}\, d\Omega$ $X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n}$ $X(e^{j\Omega})\ periódica\ (2\pi)$	SEÑAL PERIÓDICA
	SEÑAL DISCRETA	SEÑAL CONTINUA	**DOMINIO DE LA FRECUENCIA**

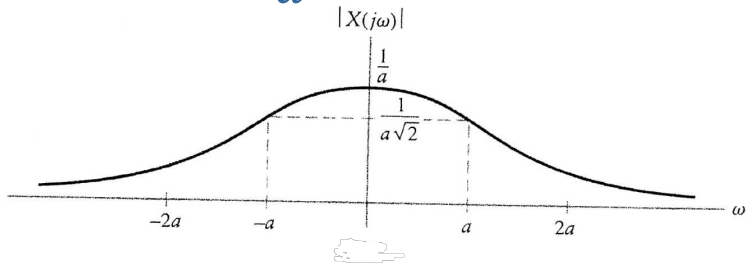
Transformada de Fourier: señales continuas (VIII)

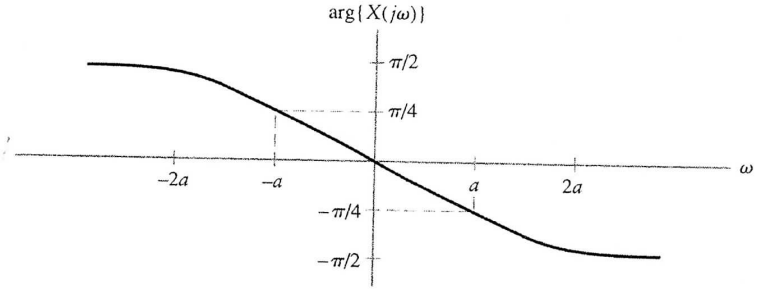
- Ejemplo1: Encontrar la FT de la señal $x(t) = e^{-at}u(t),\ a > 0$
  - Si $a \leq 0$, la transformada no converge

- Solución: $X(j\omega) = -\frac{1}{a+j\omega}$

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{(a^2+\omega^2)^{1/2}}; \quad arg\{X(j\omega)\} = -arctg\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



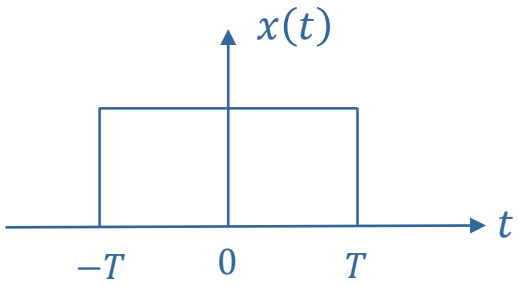


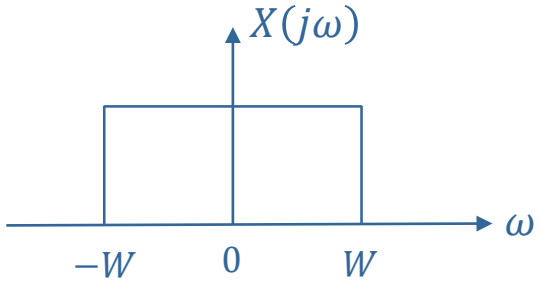


Transformada de Fourier: señales continuas (IX)

- Ejemplo 2: Calcular la FT de la señal

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -T < t < T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$



- Ejemplo 3: Calcular la FT inversa:

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & -W < \omega < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$